

Elektrotechnik – 2. Das elektrische Feld II

Luft- und Raumfahrttechnik Bachelor, 1. Semester

David Straub

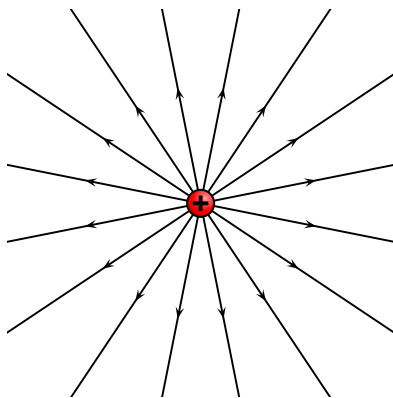
2. Das elektrische Feld

1. Elektrische Ladung
2. Coulomb'sches Gesetz
3. Elektrische Feldstärke
4. Feldlinien und Satz von Gauß
5. Elektrisches Feld in Materie
6. Potential, Spannung, Arbeit
7. Homogenes Feld und Kondensatoren

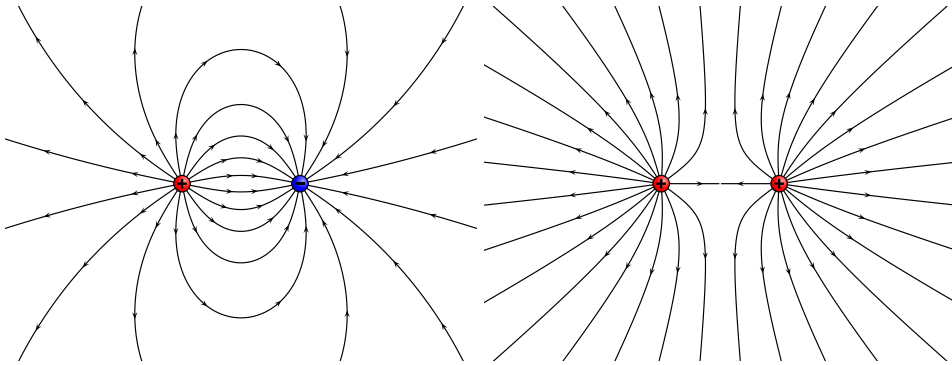
Feldlinien

- Feldlinien stellen Richtung und Stärke des elektrischen Feldes bildlich dar
- Sie verlaufen von positiven zu negativen Ladungen und zeigen die Richtung der Kraft an, die auf eine **positive** Probeladung wirken würde
- Je dichter die Linien, desto stärker das Feld

Interaktiv: E-Feld-Editor – Ladungen setzen, ziehen, Vorzeichen und Betrag ändern und die Feldlinien mitwandern sehen

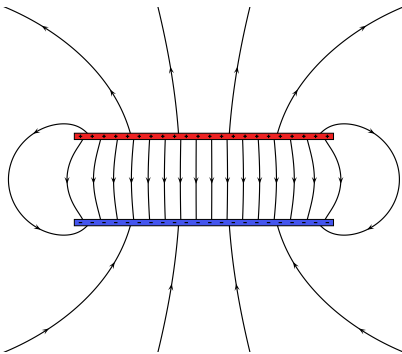


Feldlinien: Beispiele



Feldlinien: Plattenkondensator

Zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Platten: **homogenes Feld** (dazu gleich mehr)

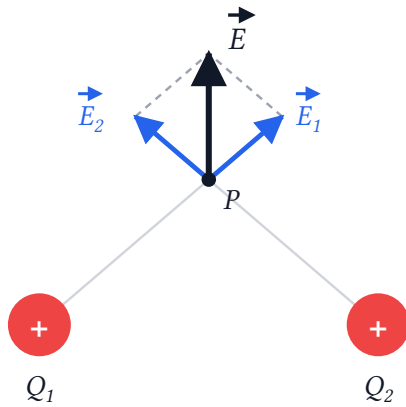


Superpositionsprinzip

Das elektrische Feld mehrerer Ladungen ist die **Vektorsumme** der Felder der einzelnen Ladungen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

- Felder stören sich nicht gegenseitig – sie addieren sich einfach
- Für kontinuierliche Ladungsverteilungen wird aus der Summe ein Integral (hier nicht vertieft)



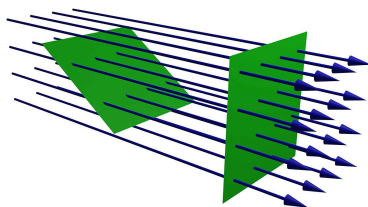
Elektrische Flussdichte (*electric flux density*)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

$$[\vec{D}] = [\epsilon_0] \cdot [\vec{E}] = \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

Fluss durch eine Fläche A :

$$\Psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$



Satz von Gauß (*Gauss's law*)

Der elektrische Fluss durch eine **geschlossene** Oberfläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{innen}}$$

Anschaulich: Feldlinien beginnen und enden nur auf Ladungen – was an Fluss „herauskommt“, muss von Ladung im Inneren stammen.

Besonders nützlich bei **hoher Symmetrie** (Kugel, Zylinder, Ebene).

Beispiel: Punktladung mit dem Satz von Gauß

Kugeloberfläche mit Radius r um eine Punktladung Q – aus Symmetriegründen ist D überall auf der Kugel gleich groß und radial:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$\Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Das Coulomb-Feld aus Woche 1 – jetzt ohne Coulomb'sches Gesetz hergeleitet!

Elektrisches Feld in Materie

- In nicht oder schwach leitenden Materialien führen elektrische Felder zu **Polarisation**: die positiven und negativen Ladungen im Material verschieben sich gegeneinander
- Das erzeugt ein internes Gegenfeld, das das äußere Feld abschwächt
- Solche polarisierbaren Materialien nennt man **Dielektrika**

Abschwächung des Feldes in Dielektrika

$$\vec{E}_{\text{Materie}} = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot \vec{E}_{\text{Vakuum}}$$

mit der Permittivitätszahl $\epsilon_r \geq 1$ (auch relative Permittivität):

Material	ϵ_r
Luft	1,00059
Gummi	2,5–3,5
Glas	5–7
Destilliertes Wasser	81

Elektrische Flussdichte in Dielektrika

Konvention: $\vec{D}$ bezieht sich immer auf das Feld der *freien* Ladungen:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_{\text{Materie}} = \epsilon \vec{E}_{\text{Materie}}, \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

Vorteil: der Satz von Gauß gilt unverändert, wenn man nur die freien Ladungen zählt:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{innen, frei}}$$

Aufgabe 3: Feldlinien & Dielektrika

- Zuerst auf Papier:** Skizzieren Sie das Feldlinienbild zweier gleichnamiger Punktladungen, von denen eine die **doppelte** Ladung trägt. Wo ist das Feld null – genau in der Mitte, näher an der großen oder näher an der kleinen Ladung? **Erst danach** mit dem E-Feld-Editor überprüfen.
- Die Punktladung aus letzter Woche ($Q = 10 \text{ nC}$, $r = 24 \text{ cm}$) wird von Vakuum in destilliertes Wasser ($\epsilon_r = 81$) getaucht. Wie groß sind dort E und D ? Was ändert sich, was bleibt gleich?

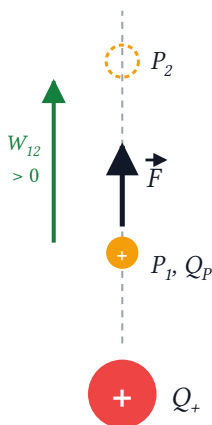
Elektrische Arbeit im Feld

Bewegung einer positiven Probeladung Q_P im Feld einer positiven Punktladung Q^+ :

- $P_1 \rightarrow P_2$ (nach außen): $W > 0$ – Arbeit wird freigesetzt
- $P_2 \rightarrow P_1$ (nach innen): $W < 0$ – Arbeit muss aufgebracht werden

Vgl. Mechanik: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ – aber hier ist $\vec{F}$ abhängig von r !

$$W_{12} = \sum_i F_i \cdot \Delta r \xrightarrow{\Delta r \rightarrow 0} W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$$



Von der Arbeit zum Potential

$$W_{12} = Q_P \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = Q_P \cdot \left[\frac{Q^+}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{Q^+}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_2} \right] = Q_P \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Die Arbeit hängt nur von **Anfangs- und Endpunkt** ab, und die Probeladung Q_P steht als Faktor davor.

→ Der Rest ist eine Eigenschaft **des Feldes allein**: jedem Ort lässt sich eine Zahl φ zuordnen.

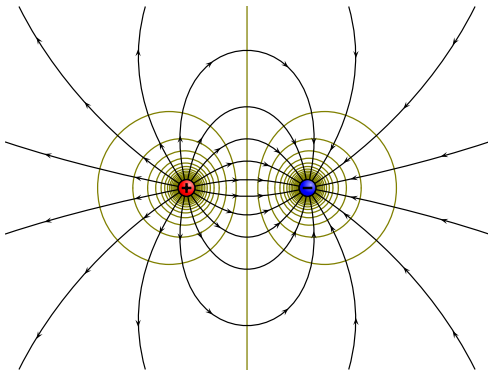
Elektrisches Potential und Äquipotentialflächen

Das **elektrische Potential** φ im Abstand r von einer Punktladung Q :

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot r}$$

Einheit: $[\varphi] = \frac{J}{C} = V$ (Volt)

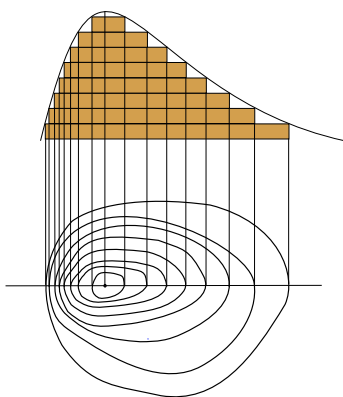
Punkte gleichen Potentials bilden **Äquipotentialflächen**. Sie stehen immer **senkrecht** auf den Feldlinien – entlang einer solchen Fläche wird keine Arbeit verrichtet.



Analogie: Gravitationspotential

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h = m \cdot \varphi_g(h)$$

- Höhenlinien auf der Landkarte = Äquipotentiallinien
- Die Kraft wirkt in Richtung des stärksten Gefälles (senkrecht zu den Höhenlinien)



Elektrostatische Felder sind **Potentialfelder**: Feldlinien beginnen/enden auf Ladungen („Quellen/Senken“) und sind nie in sich geschlossen.

Spannung & Arbeit

Elektrische Spannung (*voltage*) = Potentialdifferenz:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad [U] = \text{V}$$

Elektrische Arbeit:

$$W_{12} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = Q \cdot U_{12}, \quad [W] = \text{J}$$

Die elektrische Arbeit ist **unabhängig vom Weg!**

Feld und Spannung

Allgemeiner Zusammenhang zwischen Feldstärke und Spannung:

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi_1 - \varphi_2$$



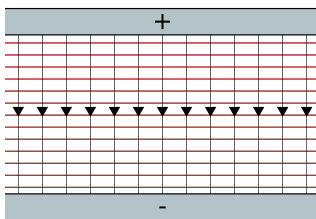
Aufgabe 4: Spannung

Noch einmal die Punktladung $Q = 10 \text{ nC}$ (im Vakuum):

Welche Spannung U besteht zwischen zwei Punkten, die $r_1 = 24 \text{ cm}$ bzw. $r_2 = 50 \text{ cm}$ von der Punktladung entfernt sind?

Homogenes elektrisches Feld

- Konstante Feldstärke E in Betrag und Richtung, parallele Feldlinien
- Äquipotentialflächen senkrecht zu den Feldlinien
- Spannung: $U = E \cdot d$ (d : Abstand in Feldrichtung)



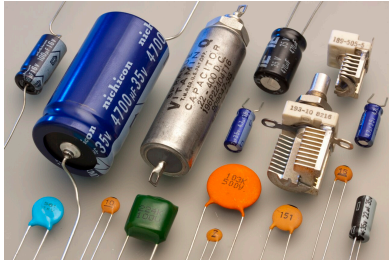
Kondensatoren (capacitors)

Kondensatoren sind Bauelemente, die elektrische Ladung speichern.

Kapazität (capacitance):

$$C := \frac{Q}{U}$$

Einheit: $[C] = \frac{\text{C}}{\text{V}} = \text{F}$ (Farad)



! Kapazität ≠ Kapazität

Die Kapazität (*capacity*) einer Batterie ist eine Ladungsmenge!

$$\text{z.B.: mAh} = 10^{-3} \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \text{ C}$$

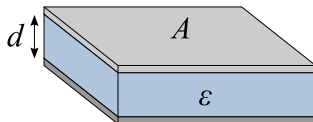
Nicht zu verwechseln mit der Kapazität (*capacitance*) eines Kondensators in Farad!

Plattenkondensator

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r A}, \quad U = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} = \frac{\epsilon A}{d}$$

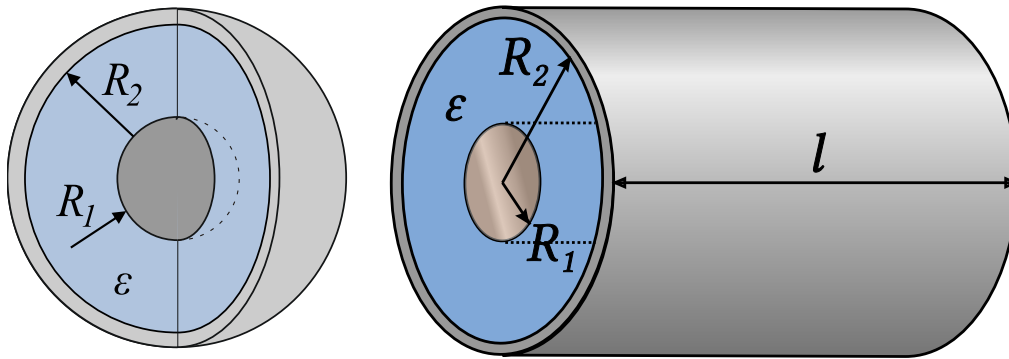
Kapazität steigt mit Fläche A , Permittivität ϵ_r und kleinerem Abstand d .



Kugel- und Zylinderkondensator

Kugel	Zylinder
$C = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	$C = 2\pi\epsilon \frac{l}{\ln(R_2/R_1)}$

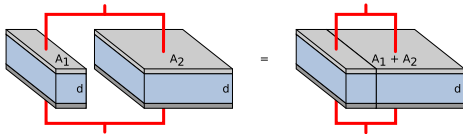
Herleitung: Satz von Gauß + $U = \int E dr$ (→ Skript; gleiche Methode wie beim Punktladungs-Beispiel)



Parallelschaltung von Kondensatoren

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

- Gleiche Spannung an allen Kondensatoren
- Gesamtladung = Summe der Einzelladungen

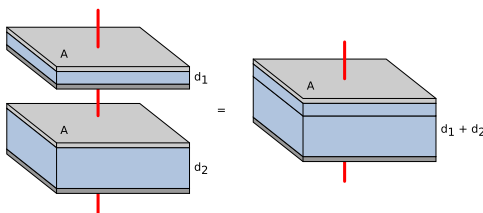


Reihenschaltung von Kondensatoren

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

- Gleiche Ladung auf allen Kondensatoren: $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{\text{ges}}$
- Gesamtspannung = Summe der Einzelspannungen

Herleitung: $C_{\text{ges}} = \frac{Q}{U_1 + U_2 + \dots} = \frac{Q}{Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right)}$



Energie im Kondensator

Beim Aufladen nimmt die Spannung mit der Ladung zu: $U(q) = \frac{q}{C}$

$$W = \int_0^Q U(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

$$[W] = V \cdot C = W \cdot s = J$$

Kondensatoren mit geschichteten Dielektrika

Nebeneinander (= Parallelschaltung):

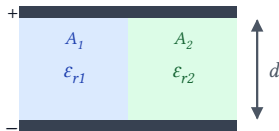
$$C = \frac{\epsilon_0}{d}(\epsilon_{r1}A_1 + \epsilon_{r2}A_2)$$

Hintereinander (= Reihenschaltung):

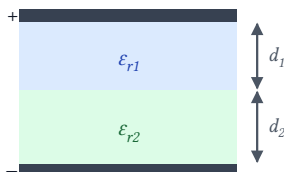
$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} A}{\epsilon_{r2}d_1 + \epsilon_{r1}d_2}$$

Anwendung: kapazitiver Ölstandsensord

a)



b)



Aufgabe 5: Kondensatoren

Zwei Kondensatoren $C_1 = 1 \mu F$ und $C_2 = 4 \mu F$ werden **in Reihe** geschaltet und an eine Spannung $U = 5000 V$ gelegt.

- Wie groß ist die Gesamtkapazität C_g ?
- Wie groß sind die Teilspannungen U_1 und U_2 ?
- Wie viel Energie ist insgesamt gespeichert?

Übersicht: Größen im elektrischen Feld

Größe	Definition	Einheit
Elektrische Ladung (<i>electric charge</i>)	Q	$[Q] = C$
Spannung (<i>voltage</i>)	$U = \Delta\varphi$	$[U] = V$
Kapazität (<i>capacitance</i>)	$C = \frac{Q}{U}$	$[C] = F = \frac{C}{V}$
Elektrische Feldstärke (<i>electric field [strength]</i>)	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$	$[\vec{E}] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C}$
Elektrische Flussdichte (<i>electric flux density</i>)	$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$	$[\vec{D}] = \frac{C}{m^2}$
Elektrische Feldkonstante (<i>electric constant</i>)	ϵ_0	$[\epsilon_0] = \frac{C^2}{N \cdot m^2}$
Relative Permittivität (<i>relative permittivity</i>)	$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$	dimensionslos

Unsere Basiseinheiten-Tabelle wächst

Elektrische Größe	Formelzeichen	Einheit	Basiseinheiten
Ladung	Q	C	$A \cdot s$
Spannung	U	V	$\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$
Kapazität	C	F	$\frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$

Herleitung an der Tafel: $[U] = \frac{[W]}{[Q]}$, $[C] = \frac{[Q]}{[U]}$

Zusammenfassung: Das elektrische Feld

- Feldlinien: von + nach –, Dichte = Feldstärke; Äquipotentialflächen $\perp$ Feldlinien
- Satz von Gauß: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{innen}}$ – mächtig bei Symmetrie
- Dielektrika schwächen das Feld: $E \rightarrow E/\epsilon_r$
- Potential φ , Spannung $U = \varphi_1 - \varphi_2$, Arbeit $W = Q \cdot U$ (wegunabhängig!)
- Homogenes Feld: $U = E \cdot d$
- Kondensator: $C = Q/U$; Platte: $C = \epsilon A/d$; parallel: C addieren, in Reihe: $1/C$ addieren
- Energie: $W = \frac{1}{2} C U^2$

Nächstes Kapitel: Gleichstrom – jetzt bewegen sich die Ladungen! 